

NGUYỄN DUY TIẾN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

TẬP I



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN DUY TIẾN

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

TẬP I
(In lần thứ ba)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Lời nói đầu	v
Vài lời về nội dung bài giảng	vii
Bảng ký hiệu	xiii

Chương 1. SỐ THỰC

1.1 Các tiên đề của số thực	01
1.2 Hệ quả	05
1.3 Nguyên lý các đoạn lồng nhau của Cantor	09
1.4 Miền mở rộng của số thực	10
1.5 Giới hạn của dãy số. Dãy số Cauchy	11
1.6 Dãy số đơn điệu	14
1.7 Một số vấn đề khác	17

Chương 2. KHÔNG GIAN METRIC

2.1 Định nghĩa và ví dụ	26
2.2 Tập compact	36
2.3 Một số khái niệm khác	40

2.4 Sự hội tụ trong không gian metric	47
2.5 Không gian metric đủ	51
2.6 Compact dãy và tập hoàn toàn bị chặn	54
2.7 Tính trù mật và không gian khả ly	59
2.8 Không gian liên thông	61
2.9 Các ví dụ quan trọng	65
2.10 Ánh xạ co và nguyên lý điểm bất động	67

Chương 3. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

3.1 Giới hạn của hàm (ánh xạ)	69
3.2 Hàm liên tục	79
3.3 Hàm liên tục trên tập compact	82
3.4 Định lý giá trị trung gian	88
3.5 Các trường hợp đặc biệt	91

Chương 4. VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

4.1 Đạo hàm của hàm số một biến	109
4.2 Các định lý cơ bản của đạo hàm (trên đoạn đóng hữu hạn)	114
4.3 Quy tắc L'Hospital	120
4.4 Công thức Taylor	122
4.5 Vi phân	132

4.6 Hàm lồi và hàm lõm	134
------------------------------	-----

Chương 5. TÍCH PHÂN RIEMANN-STIELTJES

5.1 Định nghĩa và sự tồn tại của tích phân Riemann-Stieltjes	140
5.2 Lớp các hàm khả tích	147
5.3 Các tính chất của tích phân R-S	150
5.4 Các phương pháp cơ bản tính tích phân	158
5.5 Các định lý giá trị trung bình	162

Chương 6. CHUỖI SỐ VÀ TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Phần I: CHUỖI SỐ

6.1 Các định nghĩa	167
6.2 Chuỗi dương	169
6.3 Chuỗi đan dấu	181
6.4 Chuỗi hội tụ tuyệt đối	183
6.5 Chuỗi bán hội tụ	185

Phần II: TÍCH PHÂN SUY RỘNG

6.6 Tích phân suy rộng loại I	188
6.7 Tích phân suy rộng loại II	190
6.8 Tiêu chuẩn hội tụ	194
6.9 Một số tiêu chuẩn khác	196
6.10 Tích phân Euler: Hàm gamma (Γ) và hàm beta (B)	199

Chương 7. DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM

7.1 Hội tụ điểm	205
7.2 Hội tụ đều	208
7.3 Hội tụ đều và tính liên tục	214
7.4 Hội tụ đều và tích phân	219
7.5 Hội tụ đều và vi phân	220
7.6 Tính liên tục đồng bậc	224
7.7 Chuỗi lũy thừa	229
7.8 Chuỗi Fourier	240

Chương 8. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

8.1 Trường hợp tích phân không suy rộng	261
8.2 Trường hợp tích phân suy rộng	268
8.3 Tính một số tích phân quan trọng	276
Bảng đạo hàm cơ bản	286
Bảng nguyên hàm cơ bản	287
Chỉ dẫn	291
Tài liệu tham khảo	303

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này là nội dung các bài giảng về Giải Tích do tôi biên soạn cho các sinh viên Toán-Lý năm thứ nhất của “Lớp Đào Tạo Cử Nhân Khoa Học Tài Năng”, Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, Đại Học Quốc Gia Hà Nội, năm học 1997 - 1998, 1998 - 1999 và 1999 - 2000. Vì thế, có lẽ sách này chỉ nên dùng làm bài giảng cho những sinh viên Toán - Lý khá giỏi hoặc dùng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên Toán - Lý nói chung.

Khi viết cuốn sách này tôi nhằm các mục đích chính sau đây:

1. Trang bị cho người đọc một tài liệu tương đối ngắn gọn về những kiến thức cơ bản nhất của giải tích.
2. Cách trình bày hiện đại, mạch lạc và chính xác.
3. Giúp người đọc có thể nhanh chóng nắm bắt được những ý tưởng chính và những kết quả quan trọng của giải tích.

Như vậy là, tôi có tham vọng viết **Bài giảng giải tích có nội dung cơ bản, hiện đại, tốc độ**. Với ý định ấy tôi chọn những cuốn sách sau làm tài liệu tham khảo chính:

- [1] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis (1976, tiếng Anh).
- [2] G. M. Fictengolz, A Course in Differentiation and Integration (1969, tiếng Nga, tập 1, 2, 3).
- [3] G. E. Shilop, Mathematical Analysis (1969, tiếng Nga).
- [4] X. Gourdon, Analyse (1994, tiếng Pháp).
- [5] J. de Burgos, Cálculo Infinitesimal (1991, tiếng Tây Ban Nha).

Tôi và nhiều bạn của tôi cho rằng [2] là “Kinh Thánh” của giải tích. Tuy nhiên, trọn bộ ba tập của [2] quá dày (trên 2.000 trang). Vì thế tôi chỉ chọn những phần (theo tôi) hay nhất của [2] như: hội tụ đều, tích phân phụ thuộc tham số để đưa vào bài giảng của mình. Tôi rất thích cách viết của [1], [3] và [4]. Nhiều kết quả của giải tích có trong bài giảng này được trình bày

theo quan điểm của [1], [3] và [4] như: xây dựng số thực theo tiên đề; giới hạn và liên tục được nghiên cứu trong không gian metric; tích phân được định nghĩa theo Riemann-Stieltjes. Một số bài tập được chọn lọc từ [5]. Ngoài ra, tôi đã tham khảo một số sách bằng tiếng Việt (xem phần tài liệu tham khảo ở cuối sách).

Ngày nay đã có những phần mềm trợ giúp sinh viên tính toán bằng máy tính rất có hiệu quả. Tôi nghĩ rằng cần hướng dẫn sinh viên thực hành trên máy theo tài liệu rất có ích sau:

[6] André Heck, Introduction to Maple (1996, tiếng Anh).

Vì thế, trong các bài giảng này không có nhiều phần liên quan đến tính toán: như vẽ đồ thị, tính nguyên hàm, diện tích, thể tích vôn vôn. Trong khi đó, bài giảng đòi hỏi người đọc phải nắm vững lý thuyết, làm nhiều bài tập lý thuyết.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo Đại Học Quốc Gia, Đại Học Khoa Học Tự Nhiên đã mở “Lớp Đào Tạo Cử Nhân Khoa Học Tài Năng”, nhờ đó tôi có điều kiện biên soạn và thử nghiệm các bài giảng của mình.

Nhiều sinh viên của “Lớp Đào Tạo Cử Nhân Khoa Học Tài Năng” đã đọc và sửa bản thảo bài giảng này. Đặc biệt là Hà Minh Lam, Vũ Anh Tuấn, Nguyễn Cảnh Hào, Đào Thị Thu Hà, Nguyễn Lưu Sơn, Nguyễn Anh Hoa, Đặng Anh Tuấn Nguyễn Trung Tú đã hiệu chỉnh nhiều sai sót trong bản thảo đầu tiên. Xin cảm ơn nhiều.

Tôi chân thành cảm ơn TS Trần Đức Long, PGS. TSKH Nguyễn Văn Minh, PGS. TSKH Phạm Kỳ Anh, PGS. TS Nguyễn Thủy Thanh TS Nguyễn Quang Hòa và TS. Trần Văn Trản đã đọc kỹ bản thảo, sửa nhiều lỗi chính tả và cho nhiều ý kiến quý báu để bài giảng này được hoàn chỉnh hơn.

Các GS Hà Huy Khoái, Ngô Việt Trung, Nguyễn Hữu Việt Hưng đã cho tôi một số tư liệu quý liên quan đến lịch sử toán. Xin chân thành cảm ơn.

Tôi cảm ơn Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã hoàn thiện bản thảo để cuốn sách này sớm đến tay bạn đọc.

Tôi đã giành nhiều thời gian, nhiều sức lực và kiên nhẫn (kể cả tự đánh máy bằng Tex) để viết các bài giảng này. Song tôi hiểu rằng cuốn sách còn có nhiều vấn đề cần tranh luận, còn nhiều thiếu sót. Rất mong bạn đọc khuyến bảo, chỉ dẫn và góp ý.

Vài lời về nội dung bài giảng

Giải tích toán học là gì? Giải tích toán học (Mathematical Analysis), còn có tên là phép tính các đại lượng vô cùng bé và vô cùng lớn (Calculus of Infinitely Small and Large Quantities) hoặc phép tính vi tích phân (Calculus of Differentiation and Integration, hoặc gọi tắt là Calculus), ra đời vào nửa cuối thế kỷ 17. Calculus là ngành toán nghiên cứu chuyển động và sự thay đổi của vật chất. Nơi nào có chuyển động hoặc sự tăng trưởng thì nơi ấy có thể dùng Calculus. Phép tính vi phân cho phép ta xác định mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong, tính tốc độ và gia tốc của vật chuyển động và vân vân. Phép tính tích phân cho phép ta tính diện tích mặt, tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể theo tốc độ của nó và vân vân.

Có rất nhiều học giả xuất chúng tham gia xây dựng lĩnh vực toán học này. Đầu tiên phải kể tới Sir Isaac **Newton** (1642-1727, người Anh), Baron Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646-1716, người Đức). Trước Newton và Leibniz cần phải nhắc đến nhà thiên văn Johannes **Kepler** (1571-1630, người Đức) đã giành 20 năm để khám phá ra ba định luật chuyển động của các hành tinh:

1. Mỗi hành tinh chuyển động theo một ellipse có một tiêu điểm là mặt trời.
2. Bán kính vector từ mặt trời tới hành tinh quét những diện tích như nhau trong những khoảng thời gian như nhau.
3. Bình phương chu kỳ quay của hành tinh quanh mặt trời tỷ lệ với lũy thừa ba của nửa trục lớn, tức là, nếu T là chiều dài quãng đường hành tinh đi được trong một năm và a là nửa trục lớn của ellipse tương ứng thì T^2/a^3 có giá trị không đổi đối với mọi hành tinh trong hệ mặt trời.

Bằng Calculus ta có thể rút ra ba định luật trên từ các định luật chuyển

động của Newton, nhưng đây là công việc "buổi chiều". Vậy là, Kepler nhờ các quan sát thực nghiệm đã mô tả hệ mặt trời hoạt động như thế nào, sau đó Newton và Leibniz dùng Calculus giải thích vì sao lại như thế. Theo tôi điều này chứng tỏ vật lý, cơ học, thiên văn là "cội nguồn" của giải tích.

Nhiều người cho rằng, Archimedes (287-212 trước công nguyên, người Sicily) là nhà toán học vĩ đại nhất thế giới và là tác giả của Calculus, vì ông đã tìm ra phương pháp tính diện tích của hình có dạng parabola và thể tích của hình nón, của parabola tròn xoay v.v.

Năm 1821 Augustin Louis **Cauchy** (1789-1857, người Pháp) công bố cuốn sách nổi tiếng "Giải tích", trong đó ông trình bày giải tích dựa trên lý thuyết chặt chẽ về giới hạn. Ông định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ ϵ, δ . Cách định nghĩa này đã trở thành chuẩn mực của tất cả sách giáo khoa về giải tích. Các tư tưởng chính của Cauchy vẫn còn rực sáng tới ngày nay. Cauchy đã công bố 750 công trình về toán. Nếu mỗi năm Cauchy viết 12 bài, thì ông phải viết suốt 63 năm liền, thế nhưng ông chỉ thọ 68 tuổi!

Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass** (1815-1897, người Đức) cũng đã dùng ngôn ngữ ϵ, δ để định nghĩa giới hạn và có nhiều đóng góp vô cùng to lớn cho giải tích. Hầu hết các công trình của ông được giới toán học biết đến sau khi ông đã qua đời.

Không thể không nhắc tới những cống hiến to lớn của Bernhard **Bolzano** (1781-1848, người Tiệp, nhiều năm làm việc ở Áo) với công trình "Nghiên Cứu Hàm Số" do ông viết năm 1830 ở Praha, nhưng 100 năm sau thế giới mới biết đến. Thực ra, có một số kết quả quan trọng được Bolzano tìm ra trước Cauchy và Weierstrass.

Sự phát triển của giải tích (cổ điển) còn gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà toán học kiệt xuất thế kỷ 17, 18, 19 và đầu thế kỷ 20 như :

René Descartes (1596-1650, người Pháp),

Pierre De Fermat (1601-1665, người Pháp),

Isaac Barrow (1630-1677, người Anh),

Michel Rolle (1652-1719, người Pháp),

Jacob Bernoulli (1654-1705, người Thụy Sĩ),

Johann Bernoulli (1667-1748, người Thụy Sĩ),

Brook Taylor (1685-1731, người Anh),

Leonhard Euler (1707-1783, người Thụy sĩ, nhiều năm làm việc ở Nga).